Über die gleichmäßige Konvergenz Dirichletscher Reihen.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Satz: *Es sei*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \qquad (\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots,\ \lambda_n \to \infty) \tag{1}$$

eine Dirichletsche Reihe mit Konvergenzgebiet. Die durch (1) *definierte Funktion* $f(s)$ *sei für* $\sigma > \eta$ *regulär und beschränkt:*

$$|f(s)| < K. \tag{2}$$

1. *Falls für jedes* $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = O\left(e^{\lambda_n \varepsilon}\right) \tag{3}$$

ist, konvergiert (1) *für* $\sigma > \eta$ *und zwar gleichmäßig für* $\sigma > \eta + \varepsilon$.

2. *Falls*

$$\frac{\log n}{\lambda_n} \to 0 \tag{4}$$

ist, konvergiert (1) *absolut für* $\sigma > \eta$.

Vorbemerkung: In einer Arbeit gleichen Titels[1]) hat Herr Bohr (weniger einfach) bereits bewiesen: Teil 1 des entsprechenden Satzes, wenn (3) durch die schärfere Voraussetzung $\frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = O(e^{\lambda_n k})$ (mit irgendeinem k) ersetzt wird; Teil 2 vollständig.

Beweis: 1. Es sei

$$s_0 = \sigma_0 + t_0 i, \quad \sigma_0 > \eta + \varepsilon, \quad \omega_n = e^{e^{\lambda_n \frac{\varepsilon}{2}}}, \quad A(x) = \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n e^{-\lambda_n s_0}.$$

[1]) Journal für die reine und angewandte Mathematik **143** (1913), S. 203—211.

Nach einem Perronschen Satz, (2) und (3) ist bei passendem $\gamma > 0$

$$|A(\lambda_n) - f(s_0)| = \left| \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} A(y)\,dy - f(s_0) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - \infty i}^{\gamma + \infty i} \frac{e^{\lambda_{n+1} s} - e^{\lambda_n s}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \frac{f(s+s_0)}{s^2}\,ds - f(s_0) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\varepsilon - \infty i}^{-\varepsilon + \infty i} \frac{e^{\lambda_{n+1} s} - e^{\lambda_n s}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \frac{f(s+s_0)}{s^2}\,ds \right| < \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Min.} \left(|s|\, e^{-\lambda_n \varepsilon}, \frac{2 e^{-\lambda_n \varepsilon}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \right) \frac{K}{|s|^2}\,dt$$

$$< K e^{-\lambda_n \varepsilon} \left(\int_0^1 \frac{dt}{\varepsilon} + \int_1^{\omega_n} \frac{dt}{t} + K_1(\varepsilon)\,\omega_n \int_{\omega_n}^{\infty} \frac{dt}{t^2} \right) = K e^{-\lambda_n \varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} + e^{\lambda_n \frac{\varepsilon}{2}} + K_1(\varepsilon) \right) \to 0.$$

2. Bei passendem $\gamma > \eta$ und für jedes $\varepsilon > 0$ ist wegen (2) und (4)

$$|a_n|\, e^{-\lambda_n (\eta + \varepsilon)} = \left| \lim_{T = \infty} \frac{1}{2T i} \int_{\gamma - Ti}^{\gamma + Ti} f(s)\, e^{\lambda_n (s - \eta - \varepsilon)}\,ds \right|$$

$$= \left| \lim_{T = \infty} \frac{1}{2T i} \int_{\eta + \frac{\varepsilon}{2} - Ti}^{\eta + \frac{\varepsilon}{2} + Ti} f(s)\, e^{\lambda_n (s - \eta - \varepsilon)}\,ds \right| \leqq K e^{-\lambda_n \frac{\varepsilon}{2}} < K_2(\varepsilon)\, e^{-2 \log n}.$$

Göttingen, den 26. Juli 1921.

(Eingegangen am 27. Juli 1921.)